(4308MAT20)

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE (CBCS) EXAMINATION, JULY/AUGUST 2022

FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper IV — REAL ANALYSIS

(Regular)

Time : 3 Hours *Max. Marks : 75*

PART – A

విభాగము – ఎ

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

(Marks : 5 × 5 marks = 25 marks)

T. Ak

1. Test for Convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right)$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right)$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

2. Test for convergence of $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+.....$

   $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+.....$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

3. Discuss the continuity of $f(x)= x^2$ for $x <-2$.

   $x <-2$ వద్ద $f(x)= x^2$ ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను చర్చించండి.

4. Discuss the continuity of the function $f(x)=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, $x \neq 0$, $f(0)=0$ at origin.

   '0' వద్ద $f(x)=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, $x \neq 0$, $f(0)=0$ యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

[P.T.O]

5. State and prove Lagrange's mean value theorem.

లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

6. Show that $f(x)=|x-2|$ is not derivable at $x=2$.

$x=2$ వద్ద $f(x)=|x-2|$ అను ప్రమేయము అవకలనీయము కాదని చూపండి.

7. Show that $x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x}$, $\forall x < 0$.

$\forall x < 0$ అయినప్పుడు $x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x}$ అని చూపండి.

8. State and Prove Rolle's theorem.

రోలిస్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించండి.

9. Find $L(P, f)$, $U(P, f)$ of $f(x)=x$ on $[0, 1]$ when $P=\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$.

$[0, 1]$ అంతరంలో $f(x)=x$ మరియు $P=\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ అయితే $L(P, f)$ మరియు $U(P, f)$లను కనుక్కోండి.

10. If $f \in R[a, b]$, then prove that $|f| \in R[a, b]$.

$f \in R[a, b]$ అయితే, $|f| \in R[a, b]$ అని నిరూపించండి.

PART – B

విభాగము – బి

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 10 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

(Marks : 5 × 10 marks = 50 marks)

11. State and prove Cauchy's n^{th} root test.

కోషి n–వ మూల పరీక్షను ప్రవచించి, నిరూపించండి.

12. State and prove D^1 – Alembert's test.

D^1 – ఆలంబర్ట్స్ పరీక్షను ప్రవచించి, నిరూపించండి.

13. Discuss the continuity of the function "f" defined by $f(x)=|x|+|x-1|$ at $x=0$ and $x=1$.

$x=0$ మరియు $x=1$ ల వద్ద $f(x)=|x|+|x-1|$ f ప్రమేయము యొక్క అవిచ్ఛిన్నాన్ని చర్చించండి.

14. If $f:[a, b]\to R$ is continuous on $[a, b]$ and $f(a)$, $f(b)$ have opposite signs then prove that there exists $C\in(a, b)$ such that $f(c)=0$.

$f:[a, b]\to R$ ప్రమేయం $[a, b]$ మీద అవిచ్ఛిన్నము మరియు $f(a)$, $f(b)$ లకు వ్యతిరేక గుర్తులుంటే $f(c)=0$ అయ్యే విధంగా $C\in(a, b)$ వ్యవస్థితమగునని నిరూపించండి.

15. Prove that $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$ and $f(0)=0$ continuous but not derivable at $x=0$.

$x=0$ వద్ద $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\neq 0$ మరియు $f(0)=0$ అయితే అవిచ్ఛిన్నమము అవుతుందని, అవకలనీయం కాదని నిరూపించండి.

16. Prove that $f(x)=x\left(\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$ if $x\neq 0$ and $f(0)=0$ is continuous at $x=0$ but not derivable at $x=0$.

$x=0$ వద్ద $f(x)=x\left(\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$, $x\neq 0$, అయి మరియు $f(0)=0$ అయినప్పుడు అవిచ్ఛిన్నము అవుతుందని కాని అవకలనీయం కాదని నిరూపించండి.

$f(x) = x(x-1)(x-2)$.

17. Discuss the applicability of Langrange's mean-value theorem for $f(x)=x+(x-1)(x-2)$ on $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ వద్ద $f(x)=x+(x-1)(x-2)$ ప్రమేయమునకు లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమునకు ఉపయోగించి చర్చించండి.

18. State and prove Cauchy's – Mean value theorem.

కోషి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమునకు ప్రవచించి, నిరూపించండి.

19. If $f:[a, b] \to R$ is continuous on $[a, b]$, then prove that $f \in R[a, b]$.

'f' ప్రమేయం $[a, b]$ మీద అవిచ్ఛిన్నమైతే $[a, b]$ మీద f సమాకలనీయము అవుతుందని నిరూపించండి.

20. If $f \in R[a, b]$ and m, M are the infimum and Supermum of 'f' on $[a, b]$, then prove that $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

$f \in R[a, b]$ మరియు $[a, b]$ లో గరిష్ఠ దిగువ హద్దు f, కనిష్ఠ ఎగువ హద్దు f లు m, M ల అయితే,

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ అని నిరూపించండి.
