(3308MAT20)

THREE YEAR B.Sc., (CBCS) DEGREE EXAMINATION, MARCH/APRIL 2022

(Regular)

THIRD SEMESTER

Mathematics

ABSTRACT ALGEBRA

(2020 Regulation)

T. lal. k.

Time : 3 Hours *Max. Marks : 75*

PART – A

విభాగము – ఎ

Answer any FIVE of the following questions.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 5 marks = 25 marks)

1. Prove that in a group G, inverse of any element is unique.

   సమూహము "G" లో ఏ మూలకానికైనా విలోమము ఏకైకము అని నిరూపించండి.

2. Prove that the set $G = \{1,2,3,4,5,6\}$ is a finite abelian group of order "6" with respect to X_7.

   $G = \{1,2,3,4,5,6\}$ సమితి X_7 దృష్ట్యా '6'వ తరగతి పరిమిత వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

3. Prove that a necessary and sufficient condition for a non-empty subset "H" of a group G to be a sub group of G is that $HH^{-1} = H$

   ఒక సమూహము G లో H అనే శూన్యేతర కాంప్లెక్స్ "G" లో ఉప సమూహము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $HH^{-1} = H$ అని నిరూపించండి.

4. If a,b are any two elements of a group G and H any subgroup of G, then prove that $a \in bH \Leftrightarrow aH = bH$

   ఒక సమూహము G లో a,b లు ఏవైనా రెండు మూలకాలు మరియు G లో H ఉపసమూహము అయితే $a \in bH \Leftrightarrow aH = bH$ అని నిరూపించండి..

5. Prove that sub group of an abelian group is normal.

   వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము అభిలంబము అవుతుందని నిరూపించండి.

[P.T.O]

6. Prove that every homomorphic image of an abelian group is abelian.

ఒక వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపతా ప్రతిబింబము ఒక వినిమయ సమూహము అవుతుందని నిరూపించండి.

7. If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ then find fg and gf in permutation groups.

ప్రస్తార సమూహాలలో $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ మరియు $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ అయినచో fg మరియు gf లను కనుక్కోండి.

8. Show that $G = \{1, -1, i, -i\}$ the set of all fourth roots of unity is a cyclic group with respect to multiplication.

$G = \{1, -1, i, -i\}$ ఒకటి యొక్క నాలుగవ మూలాల సమితి గుణకారము దృష్ట్యా ఒక చక్రీయ సమూహము అని చూపండి.

9. Construct a field of two elements i.e. $(F = \{0,1\})$

$(F = \{0,1\})$ రెండు మూలకాల క్షేత్రమును నిర్మించండి.

10. *Prove that a Division ring has no zero divisors.*

విభాగ వలయంలో శూన్య భాజకములు లేవు అని నిరూపించండి.

PART – B

విభాగము – బి

Answer any FIVE of the following questions.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 10 marks = 50 marks)

11. Show that the set Q^+ of all positive rational numbers forms an abelian group under the composition defined by "o" such that $aob = \frac{ab}{3}$, for $a, b \in Q^+$.

ధన అకరణీయ సంఖ్య సమితి Q^+ పై "o" పరిక్రియ, $a, b \in Q^+$ కు $aob = \frac{ab}{3}$ గా నిర్వచించబడిన (Q^+, o) ఒక ఎబీలియన్ సమూహము అని చూపండి.

12. Prove that the set G of rational numbers other than "1" with operation $\oplus$ such that $a \oplus b = a + b - ab$, for $\forall a, b \in G$ is an abelian group.

"1" కాకుండా మిగిలిన అకరణీయ సంఖ్యలతో ఏర్పడిన సమితి 'G' పై $\oplus$ పరిక్రియ $a \oplus b = a + b - ab, \forall a, b \in G$ గా నిర్వచింపబడిన $(G, \oplus)$ ఒక ఏబిలియన్ సమూహము అని నిరూపించండి.

13. Prove that a non-empty complex H of a group "G" is a subgroup of G if and only if (a) $a \in H, b \in H \Rightarrow ab \in H$ and (b) $a \in H, a^{-1} \in H$

ఒక సమూహము G లో శూన్యేతర కాంప్లెక్స్ "G" లో H ఉపసమూహము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమాలు (a) $a \in H, b \in H \Rightarrow ab \in H$ మరియు (b) $a \in H, a^{-1} \in H$ అని నిరూపించండి.

14. Prove that the necessary and sufficient condition for a finite complex H of a group G to be a subgroup of G is $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

ఒక సమూహము G లో పరిమిత కాంప్లెక్స్ H, G లో ఉప సమూహము అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$ అని నిరూపించండి.

15. Prove that a subgroup H of G is normal if and only if $xHx^{-1} = H$

G లో H అభిలంబ ఉపసమూహము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\forall x \in G$ కి $xHx^{-1} = H$ అని నిరూపించండి.

16. State and prove fundamental theorem on Homomorphism of groups.

సమూహాల సమరూపతా మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించండి.

17. Examine the following permutation are even (or) odd. If

(a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(a) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ప్రస్తారాలు సరియా (లేదా) బేసియా పరీక్షించండి.

18. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $\{1, w, w^2\}$

గుణ సమూహము $\{1, w, w^2\}$ కు తుల్య రూపత కలిగిన క్రమసాస్థవ సమూహము కనుక్కోండి.

19. Prove that a finite integral domain is a field.

ప్రతి పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశము క్షేత్రము అవుతుందని నిరూపించండి.

20. State and prove cancellation laws on rings.

వలయాలలో కొట్టివేత న్యాయాలను ప్రవచించి, నిరూపించండి.