(MAT3SK) [redacted] (2110-3K)

B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, APRIL/MAY 2022.

(Regular)

Second Year – Third Semester

Part II – Mathematics

Paper III — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

1. Write down the composition table for z_4 w.r.t addition modulo 4.

   z_4 కొరకు సంకలన మాడ్యులో 4 దృష్ట్యా పరిక్రియ పట్టికను వ్రాయండి.

2. Let G be a group. Prove that $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. $\forall a, b \in G$.

   G ఒక సమూహము ప్రతి $a, b \in G$ కు $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ అని చూపుము.

3. If H is a subgroup of G then prove that $H^{-1} = H$.

   G యొక్క ఉపసమూహము H, అయిన $H^{-1} = H$ అని చూపుము.

4. Let G be a group. If $a \in G$ then prove that $o(a) = o(a^{-1})$.

   G ఒక సమూహము. $a \in G$ అయిన $o(a) = o(a^{-1})$ అని చూపుము.

5. Let G be a group. Show that the mapping $f: G \to G$ defined by $f(a) = a^{-1} \forall a \in G$ is one-one-onto.

   G ఒక సమూహము. $f: G \to G$ అనే ప్రమేయాన్ని $f(a) = a^{-1} \forall a \in G$ గా నిర్వచించిన అది అన్వేకం, సంగ్రస్తం అవుతుందని చూపుము.

6. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplication group $\{1, -1, i, -i\}$.

   గణన సమూహము $\{1, -1, i, -i\}$ తో తుల్యరూపత కలిగిన క్రమ ప్రసార సమూహము ను కనుగొనుము.

7. Prove that every Boolean ring is abelian.

ప్రతి బులియన్ వలయము వినిమయము అని చూపుము.

8. Prove that every field is an integral domain.

ప్రతి క్షేత్రము ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశము అని చూపుము.

SECTION B — ($5 \times 10 = 50$ marks)

Answer ALL questions.

9. (a) Show that the set Q^+ of all positive rational numbers forms an abelian group under the composition defined by o such that $a \circ b = \frac{ab}{3}$.

Q^+ అన్ని ధనాత్మక అకరణీయ సంఖ్యక సమితి మరియు $\circ$ యుగ్మ పరిక్రియ $a \circ b = \frac{ab}{3}$ గా నిర్వచించినప్పుడు ఒక వినిమయ సమూహము అవుతుందని చూపుము.

Or

(b) If G is a group and $a, b \in Q$ then prove that the equations $ax = b$ and $ya = b$ have a unique solution.

G ఒక సమూహము మరియు $a, b \in Q$ అయిన $ax = b$ మరియు $ya = b$ సమీకరణాలకు ఏకైక సాధన ఉండును అని చూపుము.

10. (a) Prove that a non empty complex H of a group G is a subgroup of G if and only if $ab^{-1} \in H \ \forall a, b \in H$.

సమూహము Gలో శూన్యేతర సమితి H ఉపసమూహము G కావాలంటే ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $ab^{-1} \in H \ \forall a, b \in H$ అని చూపుము.

Or

(b) State and prove Lagrange's theorem.

లాగ్రాంజ్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

11. (a) If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G then prove that H is a normal subgroup.

G ఒక సమూహము మరియు G లో సూచి 2 గా కలిగిన H ఒక ఉపసమూహము అయిన H అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించుము.

Or

(b) State and prove fundamental theorem of homomorphism.

సమ రూపత మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

12. (a) Prove that every finite group is isomorphic to a permutation group.

ప్రతి సమితి సమూహము ఒక ప్రస్తార సమూహములో తుల్య రూపత కలిగి ఉండునని నిరూపించుము.

Or

(b) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము ఒక చక్రీయము అవుతుందని నిరూపించుము.

13. (a) Prove that the characteristic of an integral domain is either a prime or zero.

ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశం యొక్క లాక్షణికము 0 లేదా అభాజ్య సంఖ్య అగునని నిరూపించుము.

Or

(b) Prove that every ideal of z is a principal ideal.

z యొక్క ప్రతి ఆదర్శము ఒక ప్రధాన ఆదర్శమని నిరూపించుము.