(MAT4SKA) **(2110-41K)**

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, SEPTEMBER /OCTOBER 2022.

(Regular)

Second Year - Fourth Semester

Part II - Mathematics

Paper IV — REAL ANALYSIS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE of the following questions.

1. Prove that every bounded sequence has atleast one limit point.

   ప్రతి పరిబద్ధ అనుక్రమం కనీసం ఒక అవధి బిందువును కలిగి ఉండునని నిరూపించుము.

2. Show that $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{7.8} + \ldots$ is absolutely convergent.

   $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{7.8} + \ldots$ పరమ అభిసరణి అని చూపుము.

3. Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{(n^3+1)} - \sqrt{(n^3-1)}\right)$.

   $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{(n^3+1)} - \sqrt{(n^3-1)}\right)$ అభిసరణీయతను పరీక్షించుము.

4. Discuss the continuity of $f(x) = \frac{1}{1-e^{1/x}}, x \neq 0; f(0) = 0$.

   $f(x) = \frac{1}{1-e^{1/x}}, x \neq 0; f(0) = 0$ యొక్క అవిచ్ఛిన్నమును చర్చించుము.

5. Prove that $\tan x > x > \sin x \; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ కు $\tan x > x > \sin x$ అని చూపుము.

6. Verify Rolle's theorem in the interval $[a, b]$ for the function $f(x) = (x-a)^m (x-b)^n$; m, n being positive integers.

   $f(x) = (x-a)^m (x-b)^n$ అను ప్రమేయంకు $[a, b]$ పై రోల్స్ సిద్ధాంతాన్ని పరీక్షించుము m, n లు ధనాత్మక పూర్ణాంకాలు.

7. If $f(x) = x$ on $[0,1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ then find $U(P, f)$ and $L(P, f)$.

$[0,1]$ పై $f(x) = x$ మరియు $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ అయిన $U(P, f)$ మరియు $L(P, f)$ కనుగొనుము.

8. If $f : [a, b] \to R$ is monotonic on $[a, b]$ then prove that f is R-integrable on $[a, b]$.

$[a, b]$ పై $f : [a, b] \to R$ ఏక దిష్టము అయిన $[a, b]$ పై f - రీమాన్ సమాకలనము అవుతుందని నిరూపించుము.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

9. (a) Prove that a monotonic sequence is convergent if and only if it is bounded.

ఏక దిష్ట అనుక్రమము అభిసరించుటకు ఆవశ్యకత పర్యాప్త నియమము అది పరిబద్ధము అగునని చూపుము.

Or

(b) State and prove Cauchy's general principle of convergence.

అభిసరణ యొక్క కౌషి సాధారణ సూత్రాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

10. (a) State and prove Cauchy's n^{th} root test.

కౌషీ n వ వర్గమూలము సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Test for convergence $\sum \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6....2n} x^{n-1}$.

$\sum \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6....2n} x^{n-1}$ యొక్క అభిసరణీయతను పరీక్షించుము.

11. (a) Examine the continuity of the function f defined by $f(x) = |x| + |x - 1|$ at $x = 0, 1$.

$f(x) = |x| + |x - 1|$ గా f అను ప్రమేయాన్ని నిర్వచిస్తే $x = 0,1$ ల వద్ద f యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించుము.

Or

(b) If $f : [a, b] \to R$ is continuous on $[a, b]$ then prove that f is bounded on $[a, b]$ and attains its bounds.

$[a, b]$ పై $f : [a, b] \to R$ అవిచ్ఛిన్నమైన $[a, b]$ పై f పరిబద్ధము అని మరియు హద్దులను కలిగి ఉండనని నిరూపించండి.

12. (a) State and prove Cauchy's mean value theorem.

కౌషి మధ్యమ విలువ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Show that $\frac{v-u}{1+v^2} < \tan^{-1} v - \tan^{-1} u < \frac{v-u}{1+u^2}, 0 < u < v$ and deduce that $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

$\frac{v-u}{1+v^2} < \tan^{-1} v - \tan^{-1} u < \frac{v-u}{1+u^2}, 0 < u < v$ అని చూపుము మరియు దాని నుండి $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$ అని రాబట్టుము.

13. (a) State and prove the necessary and sufficient condition for Riemann integral.

రీమాన్ సమాకలనమునకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) (i) Evaluate $\int_0^{\pi/4} (\sec^4 x - \tan^4 x)dx$

$\int_0^{\pi/4} (\sec^4 x - \tan^4 x)dx$ ను కనుగొనుము

(ii) Show that $\frac{1}{\pi} \le \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2} \le \frac{2}{\pi}$.

$\frac{1}{\pi} \le \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2} \le \frac{2}{\pi}$ అని చూపుము.